10.

Függvényérték kiszámítása

A továbbiakban bizonyos speciális függvények helyettesítési értékének kiszámításával fogunk foglalkozni. Tegyük fel, hogy van egy $f : X \to Y$ függvényünk, ahol X és Y tetszőleges halmazok. A feladat specifikációja tehát:

$$\begin{array}{lcccc} A & = & \underset{x}{X} & \times & \underset{y}{Y} \\ B & = & \underset{x'}{X} & & \end{array}$$

$$Q : (x = x')$$
$$R : (y = f(x'))$$

Természetesen ha semmi mást nem tudunk a függvényről, akkor a fenti specifikációhoz nem tudunk igazi megoldóprogramot adni. Ezért az elkövetkezőkben további feltételezésekkel fogunk élni.

10.1. Függvénykompozícióval adott függvény kiszámítása

Tegyük fel, hogy $f = h \circ g$, ahol $g : X \to Z$ és $h : Z \to Y$ függvények.
Tétel: Ekkor a feladat megoldható az alábbi szekvenciával:

$z := g(x)$
$y := h(z)$

Bizonyítás: Kibővítjük az állapotteret egy újabb (Z típusú) komponenssel, melynek változója legyen z. A szekvencia közbülső feltétele legyen

$Q' : (z = g(x'))$.

Ekkor a szekvencia levezetési szabálya alapján a megoldás triviálisan teljesül.

□

10.2. Esetszétválasztással adott függvény kiszámítása

Legyenek $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n : X \to \mathbb{L}$ feltételek és $g_1, g_2, \ldots, g_n : X \to Y$ függvények, és tegyük fel, hogy a π_i feltételek lefedik az X halmazt. Legyen $f : X \to Y$ az alábbi módon definiálva:

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{ha } \pi_1(x) \\ g_2(x), & \text{ha } \pi_2(x) \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x), & \text{ha } \pi_n(x) \end{cases}$$

Tétel: Ekkor az f függvény értéke kiszámolható az alábbi elágazással:

$\pi_1(x)$	$\pi_2(x)$	$\ldots$	$\pi_n(x)$
$y := g_1(x)$	$y := g_2(x)$	$\ldots$	$y := g_n(x)$

Bizonyítás: Az elágazás levezetési szabálya alapján a megoldás triviálisan teljesül.

□

10.3. Rekurzív formulával adott függvény kiszámítása

Legyen H egy tetszőleges halmaz, $k > 0$ egy egész szám, továbbá $F : \mathbb{Z} \times H^k \to H$ függvény, $t_0, t_{-1}, \ldots, t_{-k+1} \in H$ rögzített, és definiáljuk az $f : \mathbb{Z} \to H$ függvényt az alábbi módon:

$$\begin{aligned} f(0) &= t_0, \\ f(-1) &= t_{-1}, \\ &\vdots \\ f(-k+1) &= t_{-k+1} \end{aligned}$$

továbbá $\forall i \geq 0$:

$$f(i+1) = F(i+1, f(i), \ldots, f(i-k+1))$$

Feladatunk az, hogy meghatározzuk az f függvény $n \geq 0$ helyen felvett értékét.

$$\begin{array}{lccc} A = & \mathbb{Z} & \times & H \\ & n & & y \end{array}$$

$B = \mathbb{Z}$
$\quad\;\; n'$

$Q : (n = n' \land n \geq 0)$

$R : (Q \land y = f(n))$

Tétel: Az alábbi struktogrammal adott program megoldása a specifikált feladatnak:

Q	$i, y, y_{-1}, .., y_{-k+1} := 0, t_0, t_{-1}, .., t_{-k+1}$	
Q'	$i \neq n$	$P \land \pi$
	$y, y_{-1}, .., y_{-k+1} := F(i+1, y, ..., y_{-k+1}), y, .., y_{-k+2}$	Q''
R	$i := i + 1$	P

Bizonyítás:

A tétel bizonyításához elegendő, ha a fenti programot levezetjük, hiszen ekkor az állítás a specifikáció tételéből és a levezetési szabályokból következik. Legyen tehát a megoldóprogram egy ciklus, melynek invariánsa:

$P : (Q \land i \in [0..n] \land y = f(i), y_{-1} = f(i-1), \ldots, y_{-k+1} = f(i-k+1))$

Vizsgáljuk meg a ciklus levezetési szabályának feltételrendszerét:

1) Mivel az eredeti Q feltételre $Q \Rightarrow P$ nem áll fenn, a ciklus előfeltétele az alábbi

$$Q' : (Q \land i = 0 \land y = t_0, y_{-1} = t_{-1}, \ldots, y_{-k+1} = t_{-k+1})$$

állítás lesz. Egyszerűen látható, hogy a fenti program elején található szimultán értékadás Q-ból Q'-be jut.

2) $\pi = (i \neq n)$,

3) $t = n - i$,

5) a $i := i + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) Ha felírjuk az $i := i + 1$ értékadás P-re vonatkozó leggyengébb előfeltételét:

$$Q'' : (Q \land i + 1 \in [0..n] \land y = f(i+1), y_{-1} = f(i), \ldots, y_{-k+1} = f(i-k+2))$$

akkor az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabály alapján egyszerű behelyettesítéssel verifikálható, hogy a ciklusmag első fele $P \land \pi$-ből Q''-be jut.

□

Megjegyezzük még, hogy a 0 kezdőpont választása önkényes, bármilyen tetszőleges egész számtól kezdve definiálható egy függvény, és akkor értelemszerűen a program ciklusváltozója is arról az értékről indítandó.

10.4. Elemenként feldolgozható függvény

A továbbiakban legyenek H_1 és H_2 tetszőleges halmazok, X és Y pedig az alábbi formában felírható halmazok:

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n$$
$$Y = Y_1 \times \ldots \times Y_m$$

ahol $X_i = \{x \in 2^{H_1} : |x| < \infty\} \quad i \in [1..n]$ és $Y_i = \{y \in 2^{H_2} : |y| < \infty\} \quad i \in [1..m]$. Amint az a fenti leírásból kiderül az X az összes olyan halmaz n-est tartalmazza, amelyeknek minden komponense az adott H_1 halmaz véges részhalmaza. Hasonlóan az Y elemei pedig az olyan halmaz m-esek, amelyek H_2-beli véges részhalmazokból állnak.

Definíció: TELJESEN DISZJUNKT FELBONTÁS

Azt mondjuk, hogy $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in X$ *teljesen diszjunkt felbontása* $x \in X$ -nek, ha

i) $\forall i \in [1..n] : x_i = \overline{x}_i \cup \overline{\overline{x}}_i$ és

ii) $\forall i, j \in [1..n] : \overline{x}_i \cap \overline{\overline{x}}_j = \emptyset$.

Vegyük észre, hogy ha X egydimenziós, akkor a teljesen diszjunkt felbontás megegyezik a diszjunkt felbontással, de többdimenziós esetben a teljesen diszjunkt felbontás egy jóval erősebb feltételt jelent.

Definíció: ELEMENKÉNT FELDOLGOZHATÓ FÜGGVÉNY

Legyen $f : X \to Y$. Ha minden $x \in X$ minden $\overline{x}, \overline{\overline{x}}$ teljesen diszjunkt felbontására

i) $\forall i \in [1..m] : f_i(\overline{x}) \cup f_i(\overline{\overline{x}}) = f_i(x)$ és

ii) $\forall i \in [1..m] : f_i(\overline{x}) \cap f_i(\overline{\overline{x}}) = \emptyset$,

akkor f -et *elemenként feldolgozhatónak* nevezzük.

Példa: Legyen H egy teszőleges halmaz, $X_1 = X_2 = Y = \{x \in 2^H : |x| < \infty\}$, $f : X_1 \times X_2 \to Y$, $f((x_1, x_2)) = x_1 \cup x_2$. Ekkor f elemenként feldolgozható, ui: tekintsük az (x_1, x_2) halmazpár egy tetszőleges $\overline{(x_1, x_2)}$, $\overline{\overline{(x_1, x_2)}}$ teljesen diszjunkt felbontását. Ekkor a teljesen diszjunkt felbontás definíciója alapján:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 \cup \overline{\overline{x}}_1 &= x_1, & \overline{x}_2 \cup \overline{\overline{x}}_2 &= x_2 \\ \overline{x}_1 \cap \overline{\overline{x}}_1 &= \emptyset, & \overline{x}_2 \cap \overline{\overline{x}}_2 &= \emptyset \\ \overline{x}_1 \cap \overline{\overline{x}}_2 &= \emptyset, & \overline{x}_2 \cap \overline{\overline{x}}_1 &= \emptyset \end{aligned}$$

Vizsgáljuk most meg az elemenként feldolgozhatóság két kritériumát:

1. $f(\overline{(x_1, x_2)}) \cup f(\overline{\overline{(x_1, x_2)}}) = (\overline{x}_1 \cup \overline{x}_2) \cup (\overline{\overline{x}}_1 \cup \overline{\overline{x}}_2) = (\overline{x}_1 \cup \overline{\overline{x}}_1) \cup (\overline{x}_2 \cup \overline{\overline{x}}_2) = x_1 \cup x_2 = f((x_1, x_2))$,

2. $f(\overline{(x_1, x_2)}) \cap f(\overline{\overline{(x_1, x_2)}}) = (\overline{x}_1 \cup \overline{x}_2) \cap (\overline{\overline{x}}_1 \cup \overline{\overline{x}}_2) = (\overline{x}_1 \cap \overline{\overline{x}}_1) \cup (\overline{x}_1 \cap \overline{\overline{x}}_2) \cup (\overline{x}_2 \cap \overline{\overline{x}}_1) \cup (\overline{x}_2 \cap \overline{\overline{x}}_2) = \emptyset$.

Tehát a – kétváltozós – unió elemenként feldolgozható halmazfüggvény.

A továbbiakban tehát egy elemenként feldolgozható függvény helyettesítési értékének kiszámításával fogunk foglalkozni.

Mielőtt belekezdenénk a feladat specifikálásába és megoldásába bevezetünk két olyan halmazokra vonatkozó parciális értékadást, amelyeket aztán a megoldó programokban primitív műveletnek tekintünk.

- Legyen H egy tetszőleges halmaz, és definiáljuk az $f_{\tilde{\cup}} : 2^H \times H \to 2^H$ parciális függvényt:
$$f_{\tilde{\cup}}(h, e) = H \cup \{e\}, \text{ha } e \notin H.$$
A fenti függvényt kiszámító $h := f_{\tilde{\cup}}(h, e)$ parciális értékadást a továbbiakban $h := h \,\tilde{\cup}\, e$-vel fogjuk jelölni.

- Hasonlóan legyen H egy tetszőleges halmaz, és definiáljuk az $f_{\simeq} : 2^H \times H \to 2^H$ parciális függvényt:
$$f_{\simeq}(h, e) = H \setminus \{e\}, \text{ha } e \in H.$$
A fenti függvényt kiszámító $h := f_{\simeq}(h, e)$ parciális értékadást a továbbiakban $h := h \simeq e$-vel fogjuk jelölni.

10.4.1. Egyváltozós-egyértékű eset

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor mind X, mind Y egykomponensű, azaz $m = n = 1$. Ekkor az f függvény egy halmazhoz egy másik halmazt rendel.

$$\begin{array}{lcl} A & = & \underset{x}{X} \times \underset{y}{Y} \\ B & = & \underset{x'}{X} \end{array}$$

$Q : (x = x')$

$R : (y = f(x'))$

Oldjuk meg a feladatot ciklussal: az invariánsban azt fogalmazzuk meg, hogy az x halmaz a még feldolgozandó elemeket, az y halmaz pedig a már feldolgozott elemek f szerinti képeinek unióját tartalmazza, azaz

$P : (y \cup f(x) = f(x') \wedge y \cap f(x) = \emptyset)$

Vizsgáljuk meg a ciklus levezetési szabályának feltételeit:

1) Q-ból az $y = \emptyset$ fennállása esetén következik P, ezért a ciklus elé az $y := \emptyset$ értékadás kerül.

2) Az invariánsból $f(x) = \emptyset$ esetén következik az utófeltétel, ám ez jó eséllyel nem egy megengedett feltétel (hiszen éppen f-et akarjuk kiszámítani). Vegyük észre azonban, hogy f elemenkénti feldolgozhatósága miatt $x = \emptyset$ esetén $f(x) = \emptyset$ is teljesül (az üres halmaznak két üres halmaz egy teljesen diszjunkt felbontása). Tehát a ciklusfeltétel: $\pi = x \neq \emptyset$.

3) Ha (a ciklusfeltétel szerint) x nem üres, akkor termináló függvénynek válaszható x számossága, azaz $t = |x|$.

5) x számosságát úgy tudjuk csökkenteni, ha elhagyunk belőle egy – benne levő – elemet. Ezt megtehetjük az imént bevezetett parciális értékadással: $x := x \simeq e$.

4) Írjuk fel a fenti parciális értékadás P-re vonatkozó leggyengébb előfeltételét:

$Q'' : (y \cup f(x \setminus \{e\}) = f(x') \wedge y \cap f(x \setminus \{e\}) = \emptyset \wedge e \in x)$

Jól látható, hogy ez $P \wedge \pi$-ből nem következik. Vegyük azonban észre, hogy ha e egy x-beli elem, akkor $\{e\}$ és $x \setminus \{e\}$ x-nek egy teljesen diszjunkt felbontása, tehát f elemenkénti feldolgozhatósága miatt:

$$\begin{aligned} f(\{e\}) \cup f(x \setminus \{e\}) &= f(x) \\ f(\{e\}) \cap f(x \setminus \{e\}) &= \emptyset \end{aligned}$$

Így az $y := y \,\tilde{\cup}\, f(\{e\})$ értékadás már majdnem elegendő, hiszen

$lf(y := y \,\tilde{\cup}\, f(\{e\}), Q'') = (y \cup f(\{e\}) \cup f(x \setminus \{e\}) = f(x') \wedge (y \cup f(\{e\})) \cap f(x \setminus \{e\}) = \emptyset \wedge e \in x)$.

Ezt a feltételt összevetve $P \wedge \pi$-vel látható, hogy már csak az $e \in x$ állítást kell teljesítenünk. Ezt viszont megtehetjük az $e :\in x$ értékkiválasztással, amelynek a fenti állításra vonatkozó leggyengébb előfeltétele $P \wedge \pi$.

Tétel: Ekkor az alábbi program megoldása a specifikált feladatnak:

Q	$y := \emptyset$	
Q'	$x \neq \emptyset$	
	$e :\in x$	$P \wedge \pi$
	$y := y \,\tilde{\cup}\, f(\{e\})$	Q'''
	$x := x \simeq e$	Q''
R		P

Bizonyítás: A tétel a fenti levezetésből következik.

10.4.2. Kétváltozós-egyértékű eset

Legyen $f : X \times Y \to Z \;\; (X, Y, Z \subseteq 2^H)$ elemenként feldolgozható függvény.

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & X & \times & Y & \times & Z \\ & & x & & y & & z \\ B & = & X & \times & Y & & \\ & & x' & & y' & & \end{array}$$

$Q : (x = x' \wedge y = y')$

$R : (z = f(x', y'))$

Tétel: Ekkor az alábbi program megoldása a specifikált feladatnak:

$z := \emptyset$		
$x \neq \emptyset \vee y \neq \emptyset$		
$e :\in (x \cup y)$		
$e \in x \wedge e \notin y$	$e \in x \wedge e \in y$	$e \notin x \wedge e \in y$
$z := z \,\tilde{\cup}\, f(\{e\}, \emptyset)$	$z := z \,\tilde{\cup}\, f(\{e\}, \{e\})$	$z := z \,\tilde{\cup}\, f(\emptyset, \{e\})$
$x := x \simeq e$	$x := x \simeq e$	$y := y \simeq e$
	$y := y \simeq e$	

Bizonyítás: A tétel az egyváltozós esettel analóg módon levezethető, ha invariáns tulajdonságnak az alábbi állítást:

$$P : (z \cup f(x, y) = f(x', y') \wedge z \cap f(x, y) = \emptyset \wedge$$
$$(x' \setminus x) \cap y = \emptyset \wedge (y' \setminus y) \cap x = \emptyset)$$

termináló függvénynek pedig $t = |x \cup y|$-t választjuk. $\square$

10.4.3. Egyváltozós kétértékű eset

Legyen $f : X \to Y \times Z$ $(X, Y, Z \subseteq 2^H, f_1 : X \to Y, f_2 : X \to Z, f = (f_1, f_2))$ elemenként feldolgozható függvény.

$$A = \underset{x}{X} \times \underset{y}{Y} \times \underset{z}{Z}$$
$$B = \underset{x'}{X}$$
$$Q : (x = x')$$
$$R : (y = f_1(x') \wedge z = f_2(x'))$$

Tétel: Ekkor az alábbi program megoldása a specifikált feladatnak:

$y, z := \emptyset, \emptyset$
$x \neq \emptyset$
$e :\in x$
$y, z := y \,\tilde{\cup}\, f_1(\{e\}), z \,\tilde{\cup}\, f_2(\{e\})$
$x := x \simeq \{e\}$

Bizonyítás: A tétel levezetése az egyértékű esettől csak az invariáns tulajdonság megválasztásában tér el:

$$P : (y \cup f_1(x) = f_1(x') \wedge y \cap f_1(x) = \emptyset \wedge$$
$$z \cup f_2(x) = f_2(x') \wedge z \cap f_2(x) = \emptyset)$$

A termináló függvény marad, és a levezetés lépései is megegyeznek.$\square$

10.4.4. Általános változat

Legyenek n, m rögzített természetes számok, $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Y_1 \times \dots \times Y_m (X_i, Y_j \in 2^H, \ (i \in [1..n], j \in [1..m]))$ elemenként feldolgozható függvény, és legyenek az $f_j : X_1 \times \dots \times X_n \to Y_j \ \ (j \in [1..m])$ függvények az f komponensfüggvényei, azaz $f = (f_1, \dots, f_m)$.

$$\begin{array}{lllllllllll} A & = & X_1 & \times & \dots & \times & X_n & \times & Y_1 & \times \ \dots \ \times & Y_m \\ & & x_1 & & & & x_n & & y_1 & & y_n \\ B & = & X_1 & \times & \dots & \times & X_n \\ & & x'_1 & & & & x'_n \end{array}$$

$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_n = x'_n)$

$R : (y_1 = f_1(x'_1, \dots, x'_n) \wedge \dots \wedge y_m = f_m(x'_1, \dots, x'_n))$

<table>
<tr><td colspan="3">$y_1, ..., y_m := \emptyset, ..., \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\bigcup_{i=1}^{n} x_i \neq \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$e :\in \bigcup_{i=1}^{n} x_i$</td></tr>
<tr><td>$\backslash \dots$</td><td>$\backslash$ $e \in x_{i_1} \wedge \dots e \in x_{i_k} \wedge e \notin x_{i_{k+1}} \wedge e \notin x_{i_n}$</td><td>$\backslash \dots$</td></tr>
<tr><td>$\dots$</td><td>$y_1, \dots, y_m :=$
$y_1 \tilde{\cup} f_1(sl(\{i_1 \dots i_k\}, e)), \dots, y_m \tilde{\cup} f_m(sl(\{i_1 \dots i_k\}, e))$
$x_{i_1}, \dots, x_{i_k} := x_{i_1} \simeq e, \dots, x_{i_k} \simeq e$</td><td>$\dots$</td></tr>
</table>

ahol $i_1, \dots, i_n$ az $1, \dots, n$ permutációja, $sl : 2^{\{1,\dots,n\}} \times H \to X_1 \times \dots \times X_n$,

$$sl(\{i_1, .., i_k\}, e)_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{ha } i \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ \emptyset, & \text{ha } i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \end{cases}$$

Az elágazás "ágainak" száma $2^n - 1$.

Bizonyítás: A tétel az alábbi invariáns tulajdonsággal és termináló függvénnyel formálisan levezethető (a levezetést annak bonyolultsága miatt elhagyjuk):

$$P : (\forall j \in [1..m] : (y_j \cup f_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(x'_1, \dots, x'_n) \wedge$$
$$y_j \cap f_j(x_1, \dots, x_n) = \emptyset) \wedge \forall i, k \in [1..n] : (x'_i \setminus x_i) \cap x_k = \emptyset)$$

$$t = \left| \bigcup_{i=1}^{n} x_i \right|$$

□