II. rész

Programozási módszertan

9.

Alapvető programozási tételek

Legelőször – a levezetési szabályok használatát is ismertetve – néhány egyszerű feladatra keresünk megoldóprogramot.

9.1. Összegzés

Legyen adott az $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény. Feladatunk az, hogy egy adott $[m..n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban összegezzük az f függvény értékeit. Specifikáljuk először a feladatot.

$$
\begin{array}{llllllll}
A & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} \\
 & & m & & n & & s \\
B & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & & \\
 & & m' & & n' & &
\end{array}
$$

$$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n + 1)$$

$$R : (Q \wedge s = \sum_{i=m}^{n} f(i))$$

Az előfeltételben szereplő $m \leq n + 1$ feltétel azt fogalmazza meg, hogy az m és n számok egy – legfeljebb üres – intervallumot határoznak meg. (Az intervallum akkor lesz üres, ha a kezdőpontja eggyel nagyobb mint a végpontja.)

Próbáljuk a feladatot ciklussal megoldani: ehhez a ciklus levezetési szabálya alapján keresnünk kell egy invariáns tulajdonságot (P), ami a ciklus futásának egy közbülső állapotát írja le. Fogalmazza meg ez az invariáns azt a tulajdonságot, hogy az összegzést az intervallum egy kezdőszeletére már elvégeztük. Ennek formális leírásához bővítsük ki az állapotteret egy újabb egész típusú komponenssel (k), amely azt fogja mutatni, hogy hol tartunk az összegzésben. Az új állapottér tehát legyen:

$$A' = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathbb{Z}} \times \underset{k}{\mathbb{Z}}$$

Ekkor az invariáns tulajdonság:

$$P : (Q \wedge k \in [m-1..n] \wedge s = \sum_{i=m}^{k} f(i))$$

Vizsgáljuk meg most a ciklus levezetési szabálya feltételeit:

1) $Q \Rightarrow P$: Ez a feltétel jól láthatóan nem teljesül (sőt fordítva áll fenn). Mit lehet ilyenkor tenni? Vagy a Q-t, vagy a P-t meg kell változtatni. A Q azonban a feladatot definiálja, azt nem változtathatjuk meg, a P-t pedig mi választottuk úgy, hogy egy közbülső állapotot írjon le, ezért azt sem lenne szerencsés eldobni. Van azonban egy harmadik lehetőség is: keressünk egy olyan Q' állítást, amelyre már $Q' \Rightarrow P$ teljesül, és oldjuk meg a feladatot egy olyan szekvenciával, amelynek második része egy olyan ciklus lesz, melynek előfeltétele a Q', az utófeltétele pedig R, első fele pedig egy a Q-ból Q'-be képező program (azaz alkalmazzuk a szekvencia levezetési szabályát). Legyen ez a Q' állítás:

   $$Q' : (Q \wedge k = m-1 \wedge s = 0)$$

   Könnyen látható, hogy ekkor $Q' \Rightarrow P$ fennáll. Most még keresnünk kell egy olyan programot, ami Q-ból Q'-be jut. A $k, s := m-1, 0$ értékadás megfelel ennek a kritériumnak, hiszen az értékadás leggyengébb előfeltételéről szóló tétel alapján:

   $$Q \Rightarrow lf(k, s := m-1, 0, Q') = (Q \wedge m-1 = m-1 \wedge 0 = 0) = Q.$$

2) $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$: Ebből a feltételből meghatározhatjuk, hogy mi lesz a ciklusunk feltétele. Ehhez azt kell megnézni, hogy mikor következik az invariáns tulajdonságból az utófeltétel. A kettőt összehasonlítva észrevehetjük, hogy ez $k = n$ esetén van így. Tehát

   $\neg\pi = (k = n)$, azaz $\pi = (k \neq n)$.

3) $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$: A feltétel teljesítéséhez keresnünk kell egy olyan – az állapottéren értelmezett – egészértékű függvényt, amely az invariáns és a ciklusfeltétel fennállása esetén pozitív. Mivel a változók is az állapottér függvényei, a terminálófüggvényt rajtuk keresztül fogjuk kifejezni. Vegyük észre, hogy ha $k \in [m-1..n]$ (P miatt) és $k \neq n$ (π miatt), akkor $n-k$ értéke pozitív lesz. Legyen tehát:

   $t = n - k.$

5) $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(S_0, t < t_0)$: Mivel már van terminálófüggvényünk, vegyük előre a levezetési szabály utolsó feltételét, ami azt kívánja meg, hogy a ciklusmag csökkentse a terminálófüggvényt. Mivel az utófeltétel szerint n értékét meg kell tartanunk, a terminálófüggvényt k növelésével tudjuk csökkenteni. Mennyivel

növeljük k-t? Legalább 1-gyel. Ha egy kicsit előre tekintünk, és figyelembe vesszük, hogy a ciklusmagnak az invariánst meg kell tartania (ez a 4. pont), akkor látható, hogy k-t legfeljebb 1-gyel növelhetjük meg. Tehát a $k := k+1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét, ui:

$$P \wedge \pi \wedge n - k = t_0 \Rightarrow lf(k := k+1, n-k < t_0) = n - (k+1) < t_0.$$

4) $P \wedge \pi \Rightarrow lf(S_0, P)$: Meg kell még vizsgálnunk, hogy a $k := k+1$ értékadás jó lesz-e ciklusmagnak, azaz megtartja-e az invariánst. Írjuk fel a P-hez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$lf(k := k+1, P) = (Q \wedge k+1 \in [m-1..n] \wedge s = \sum_{i=m}^{k+1} f(i))$$

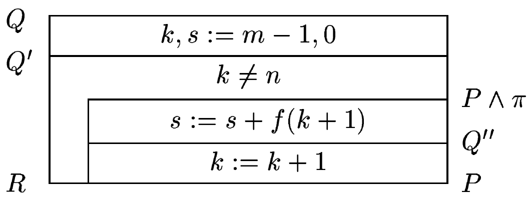
Látható, hogy ez $P \wedge \pi$-ből nem következik. Jelöljük hát a fenti feltételt Q''-vel, és legyen a ciklusmag egy olyan szekvencia, amelynek közbülső feltétele Q'' és második tagja a $k := k+1$ értékadás. Ekkor már nincs más dolgunk, mint találni egy olyan programot, ami $P \wedge \pi$-ből Q''-be képez és t értékét nem változtatja meg. Nézzük meg, hogy mi nem teljesül Q''-ben: mivel $k \in [m-1..n]$ (P) és $k \neq n$ (π), $k+1 \in [m-1..n]$ fennáll. s értéke viszont nem jó, mert P szerint csak k-ig tartalmazza f értékeinek összegét, Q'' szerint pedig már $k+1$-ig kell. A fenti meggondolás alapján tehát s növelése $f(k+1)$-gyel jó lesz, azaz:

$$P \wedge \pi \Rightarrow lf(s := s + f(k+1), Q'') =$$

$$= (Q \wedge k+1 \in [m-1..n] \wedge s + f(k+1) = \sum_{i=m}^{k+1} f(i)).$$

A fenti levezetés alapján kimondható az alábbi tétel:

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:



Bizonyítás: A tétel a szekvencia és a ciklus levezetési szabályából, a specifikáció tételéből és a fenti levezetésből következik. $\square$

9.2. Számlálás

Legyen β egy az egész számokon értelmezett logikai függvény. A feladat az, hogy számoljuk meg, hány helyen igaz β az $[m..n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban.

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{N}_0 \\ & & m & & n & & d \\ B & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{Z} & & \\ & & m' & & n' & & \end{array}$$

$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n + 1)$
$R : (Q \wedge d = \sum_{i=m}^{n} \chi(\beta(i)))$

A fenti specifikációban $\chi : \mathbb{L} \to \{0, 1\}$, amelyre $\chi(igaz) = 1$ és $\chi(hamis) = 0$ A feladat megoldása analóg az összegzés tételénél leírtakkal. A ciklus invariáns tulajdonságát itt is az utófeltétel gyengítésével kapjuk (az intervallum egy tetszőleges kezdőszeletére írjuk fel):

$P : (Q \wedge k \in [m - 1..n] \wedge d = \sum_{i=m}^{k} \chi(\beta(i)))$

A továbbiakban a ciklus levezetési szabályában szereplő feltételekhez címszószerűen felsoroljuk a levezetés során előforduló elemeket.

1) $Q' : (Q \wedge k = m - 1 \wedge d = 0)$,

2) $\pi = (k \neq n)$,

3) $t = n - k$,

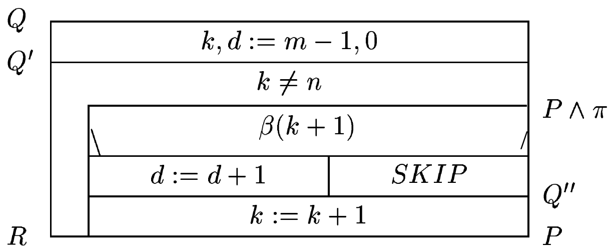
5) a $k := k + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) $Q'' = (Q \wedge k+1 \in [m-1..n] \wedge d = \sum_{i=m}^{k+1} \chi(\beta(i)))$. Itt azt kell megvizsgálni, hogy $P \wedge \pi$-ből következik-e Q''. Vegyük észre, hogy $\neg\beta(k + 1)$ esetén következik, míg $\beta(k+1)$ esetén – az összegzéshez hasonlóan – meg kell növelnünk d értékét. Ezért a $P \wedge \pi$-ből Q''-be jutó program az $IF(\beta(k+1) : d := d+1, \neg\beta(k+1) : SKIP)$ elágazás lesz, ugyanis az elágazás levezetési szabályát alkalmazva:

$$\begin{aligned} P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) &\Rightarrow lf(d := d + 1, Q'') \\ P \wedge \pi \wedge \neg\beta(k+1) &\Rightarrow lf(SKIP, Q'') \end{aligned}$$

miatt $P \wedge \pi \Rightarrow lf(IF, Q'')$ teljesül.

A fenti meggondolások alapján nyilvánvaló az alábbi tétel:
Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:



Bizonyítás: A tétel a levezetési szabályokból, és a specifikáció tételéből a fenti meggondolások (levezetés) alapján következik. □

9.3. Maximumkeresés

Legyen $\mathcal{H}$ egy tetszőleges rendezett halmaz és $f : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ egy adott függvény. Feladatunk az, hogy egy adott $[m..n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban keressük meg az f függvény maximumát és egy olyan helyét, ahol ezt a maximumértéket felveszi.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{max}{\mathcal{H}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n)$

$R : (Q \wedge i \in [m..n] \wedge max = f(i) \wedge \forall j \in [m..n] : f(j) \leq f(i))$

Vegyük észre, hogy az előbbiekkel ellentétben ebben a specifikációban nem engedtük meg az üres intervallumot. Ennek oka rendkívül egyszerű: üres intervallumon nincs értelme megkérdezni, hogy hol van a maximum. A feladatot ciklussal oldjuk meg, amelynek invariánsa:

$P : (Q \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m..k] \wedge max = f(i) \wedge \forall j \in [m..k] : f(j) \leq f(i))$

A feladatot megoldó program levezetése hasonlatos az előzőhöz, ezért itt is csak címszavakban soroljuk fel a lépéseket:

1) $Q' = (Q \wedge k = m \wedge i = m \wedge max = f(m))$,

2) $\pi = (k \neq n)$,

3) $t = n - k$,

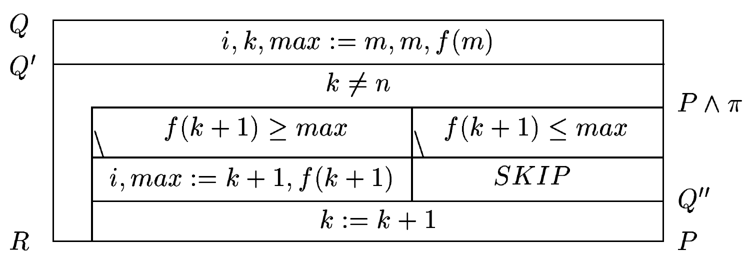
5) a $k := k + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) $Q'' = (Q \wedge k + 1 \in [m..n] \wedge i \in [m..k + 1] \wedge max = f(i) \wedge \forall j \in [m..k + 1] : f(j) \leq f(i))$ A $P \wedge \pi$-ből Q''-be jutó program itt is egy elágazás lesz: $IF(f(k{+}1) >= max : i, max := k{+}1, f(k{+}1), f(k{+}1) <= max : SKIP)$, ui.

$$P \wedge \pi \wedge f(k+1) >= max \quad \Rightarrow \quad lf(i, max := k+1, f(k+1), Q'')$$
$$P \wedge \pi \wedge f(k+1) <= max \quad \Rightarrow \quad lf(SKIP, Q'')$$

miatt $P \wedge \pi \Rightarrow lf(IF, Q'')$ teljesül.

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:



Bizonyítás: A tétel a levezetési szabályokból, és a specifikáció tételéből a fenti meggondolások (levezetés) alapján következik. □

9.4. Feltételes maximumkeresés

Legyen $\mathcal{H}$ egy tetszőleges rendezett halmaz és $f : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ egy adott függvény. Legyen β egy az egész számokon értelmezett logikai függvény. Határozzuk meg a $\lceil\beta\rceil \cap [m..n]$ halmaz felett az f függvény maximumát és a halmaz egy olyan elemét, amelyen f a maximumértékét felveszi.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{max}{\mathcal{H}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n + 1)$$

$$R : (Q \wedge l = (\exists i \in [m..n] : \beta(i)) \wedge l \to (i \in [m..n] \wedge \beta(i) \wedge max = f(i) \wedge$$
$$\forall j \in [m..n] : \beta(j) \to (f(j) \leq f(i))))$$

Vegyük észre, hogy itt újra megengedhető az üres intervallum, és hogy ekkor az a válasz, hogy az intervallumban nincs β tulajdonságú elem. A levezetés az előzőkhöz hasonlóan:

$$P : (Q \wedge k \in [m-1..n] \wedge l = (\exists i \in [m..k] : \beta(i)) \wedge l \to (i \in [m..k] \wedge \beta(i) \wedge$$
$$max = f(i) \wedge \forall j \in [m..k] : \beta(j) \to (f(j) \leq f(i))))$$

1) $Q' = (Q \wedge k = m - 1 \wedge l = hamis)$,

2) $\pi = (k \neq n)$,

3) $t = n - k$,

5) a $k := k + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

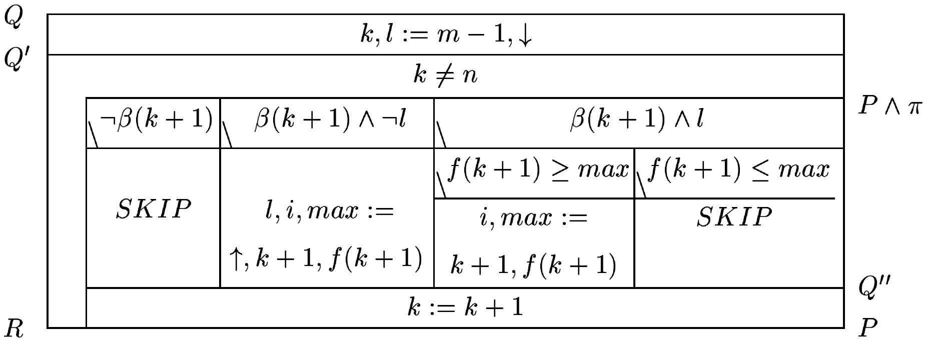
4) Írjuk fel a ciklusmag közbülső feltételét:

$$Q'' : (Q \wedge k + 1 \in [m - 1..n] \wedge l = (\exists i \in [m..k+1] : \beta(i)) \wedge$$
$$l \to (i \in [m..k+1] \wedge \beta(i) \wedge max = f(i) \wedge$$
$$\forall j \in [m..k+1] : \beta(j) \to (f(j) \leq f(i)))))$$

$P \wedge \pi$ és Q'' összehasonlításával látható, hogy három fő lehetőség van:

- $\neg\beta(k + 1)$: ekkor SKIP,
- $\beta(k+1) \wedge \neg l$: ez az első β tulajdonságú elem, tehát $l, i, max := igaz, k + 1, f(k + 1)$,
- $\beta(k + 1) \wedge l$: ekkor a maximumkeresésnél megismert két eset lehetséges:
  - $f(k + 1) >= max$: ekkor $i, max := k + 1, f(k + 1)$,
  - $f(k + 1) <= max$: ekkor $SKIP$.

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:



Bizonyítás: A tétel a levezetési szabályokból, és a specifikáció tételéből a fenti meggondolások (levezetés) alapján következik. $\square$

9.5. Lineáris keresés

Legyen $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$ adott tulajdonság. A feladat az, hogy keressük meg azt a legkisebb β tulajdonságú egész számot, amely nem kisebb, mint az adott $m \in \mathbb{Z}$ szám.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : (m = m' \wedge \exists j \geq m : \beta(j))$$

$$R : (Q \wedge i \geq m \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m..i-1] : \neg\beta(j))$$

A feladatot ciklussal oldjuk meg. Az invariánshoz gyengítjük az utófeltételt, elhagyjuk belőle $\beta(i)$-t:

$$P : (Q \wedge i \geq m \wedge \forall j \in [m..i-1] : \neg\beta(j))$$

1) $Q' = (Q \wedge i = m)$,

2) $\pi = \neg\beta(i)$,

3) Legyen $N \geq m$ tetszőlegesen rögzített olyan szám, amelyre $\beta(N)$ igaz(ilyen az előfeltétel miatt létezik). Ekkor $t = N - i$.

5) az $i := i + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) $P \wedge \pi \Rightarrow lf(i := i+1, P)$.

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:

Q	$i := m$	
Q'	$\neg\beta(i)$	
	$i := i + 1$	$P \wedge \pi$
R		P

Bizonyítás: A tétel a levezetési szabályokból, és a specifikáció tételéből a fentiek szerint következik. $\square$

A fenti program csak akkor megoldása a feladatnak, ha a β tulajdonság megengedett feltétel. Ha ez nem így van, akkor másik megoldást kell keresnünk. Válasszuk az alábbi invariánst (a feladat marad ugyanaz!):

$$P : (Q \wedge i \geq m - 1 \wedge (\forall j \in [m, i-1] : \neg\beta(j)) \wedge l = \exists j \in [m, i] : \beta(j))$$

Ekkor:

1) $Q' = (Q \wedge i = m - 1 \wedge l = hamis)$,

2) $\pi = \neg l$,

3) Legyen $N \geq m$ tetszőlegesen rögzített olyan szám, amelyre $\beta(N)$ igaz(ilyen az előfeltétel miatt létezik). Ekkor $t = N - i$.

5) az $i := i + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) A ciklusmag szekvencia lesz, melynek közbülső feltétele:

   $$Q'' : (Q \wedge i + 1 \geq m - 1 \wedge (\forall j \in [m, i] : \neg\beta(j)) \wedge l = \exists j \in [m, i+1] : \beta(j))$$

   és így a ciklusmag első fele az $l := \beta(i + 1)$ értékadás lesz.

Tétel: Ekkor az alábbi program is megoldása a specifikált feladatnak.

Q	$i, l := m - 1, \downarrow$	
Q'	$\neg l$	
	$l := \beta(i + 1)$	$P \wedge \pi$
	$i := i + 1$	Q''
R		P

Tegyük fel, hogy $\beta = \gamma \vee \delta$ és létezik $i \geq m$, hogy $\beta(i)$. Keressük meg a legelső $i \geq m : \gamma(i)$ elemet (ha van olyan), amely előtt (m-től kezdve) nem volt igaz δ! Ennek a változatnak már a specifikációja is más lesz, hiszen a feladat is megváltozott.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (m = m' \wedge \exists j \geq m : \beta(j))$
$R : (Q \wedge u = (\exists j \geq m : \gamma(j) \wedge \forall k \in [m..j-1] : \neg\delta(k))\wedge$
$\quad u \rightarrow (i \geq m \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m..i-1] : \neg\beta(j))$

A feladatot megoldó ciklus invariánsa:

$P : (Q \wedge i \geq m-1 \wedge u = (\exists j \in [m..i] : \gamma(j)) \wedge v = (\exists j \in [m..i] : \delta(j))\wedge$
$\quad \forall j \in [m, i-1] : \neg\beta(j))$

Ekkor:

1) $Q' = (Q \wedge i = m-1 \wedge u = hamis \wedge v = hamis)$,

2) $\pi = \neg u \wedge \neg v$,

3) Legyen $N \geq m$ tetszőlegesen rögzített olyan szám, amelyre $\beta(N)$ igaz (ilyen az előfeltétel miatt létezik). Ekkor $t = N - i$.

5) az $i := i+1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) A ciklusmag szekvencia lesz, melynek közbülső feltétele ($lf(i := i+1, P)$):

$Q'' : (Q \wedge i+1 \geq m-1 \wedge u = (\exists j \in [m..i+1] : \gamma(j))\wedge$
$\quad v = (\exists j \in [m..i+1] : \delta(j)) \wedge \forall j \in [m, i] : \neg\beta(j))$

és így a ciklusmag első fele az $u, v := \gamma(i+1), \delta(i+1)$ értékadás lesz.

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:

Q

Q'	$i, u, v := m-1, \downarrow, \downarrow$	
	$\neg u \wedge \neg v$	
	$u, v := \gamma(i+1), \delta(i+1)$	$P \wedge \pi$
	$i := i+1$	Q''
R		P

A fenti feladatnak van egy speciális esete, amikor δ tulajdonság azt mondja ki, hogy még nem értünk el egy n számot, azaz egy intervallumon kell keresni. Erre a speciális esetre adunk egy másik megoldást is.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$
$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n+1)$
$R : (Q \wedge l = (\exists j \in [m..n] : \beta(j)) \wedge l \rightarrow (i \in [m..n] \wedge \beta(i)\wedge$
$\quad \forall j \in [m..i-1] : \neg\beta(j)))$

Legyen a ciklus invariáns tulajdonsága:

$P : (Q \wedge i \in [m-1..n] \wedge l = (\exists j \in [m..i] : \beta(j)) \wedge \forall j \in [m..i-1] : \neg\beta(j))$

Ekkor:

1) $Q' = (Q \wedge i = m - 1 \wedge l = hamis)$,

2) $\pi = \neg l \wedge i \neq n$,

3) $t = n - i$,

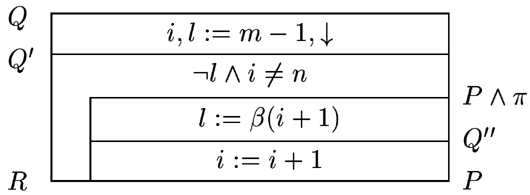
5) az $i := i + 1$ értékadás csökkenti a terminálófüggvény értékét,

4) A ciklusmag szekvencia lesz, melynek közbülső feltétele ($lf(i := i + 1, P)$):

$Q'' : (Q \wedge i + 1 \in [m - 1..n] \wedge l = (\exists j \in [m..i + 1] : \beta(j)) \wedge \forall j \in [m..i] : \neg\beta(j))$

és így a ciklusmag első fele az $l := \beta(i + 1)$ értékadás lesz.

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:



9.6. Logaritmikus keresés

Legyen $\mathcal{H}$ egy olyan halmaz, amin értelmezve van egy rendezési reláció. Legyen $f : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ monoton növekedő függvény. A feladat az, hogy döntsük el az f függvényről, hogy az adott $[m..n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumon felveszi-e a $h \in \mathcal{H}$ adott értéket, és ha igen, akkor adjuk meg az intervallum egy olyan pontját, ahol a függvényérték h.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathcal{H}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}} \times \underset{h'}{\mathcal{H}}$$

$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge h = h' \wedge m \leq n + 1 \wedge \forall k, j \in [m..n] :$
$(k < j) \to (f(k) \leq f(j)))$

$R : (Q \wedge l = (\exists j \in [m..n] : f(j) = h) \wedge l \to (i \in [m..n] \wedge f(i) = h))$

A monotonitást felhasználva az intervallumot mindkét végéről szűkítjük az invariánsban:

$P : (Q \wedge [u..v] \subseteq [m..n] \wedge \forall j \in [m..n] \setminus [u..v] : f(j) \neq h \wedge$
$l \to (i \in [u..v] \wedge f(i) = h))$

Ekkor

1) $Q' = (Q \wedge u = m \wedge v = n \wedge l = hamis)$,

2) $\pi = \neg l \wedge u \leq v$,

3) Informálisan fogalmazva jelölje t a még megvizsgálandó elemek számát. Ezt egy esetszétválasztással adhatjuk meg:

$$t = \begin{cases} v - u + 1, & \text{ha } \neg l \\ 0, & \text{ha } l \end{cases}$$

4) A ciklusmag legyen egy szekvencia, melynek közbülső feltétele:

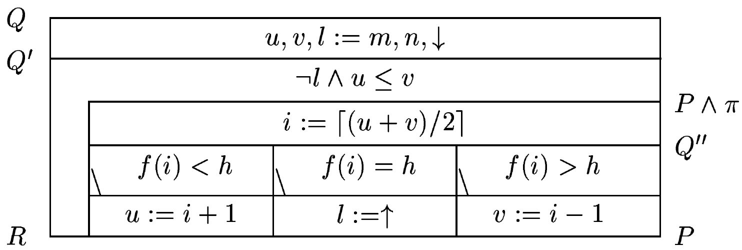
   $Q'' : (Q \wedge [u..v] \subseteq [m..n] \wedge \forall j \in [m..n] \setminus [u..v] : f(j) \neq h \wedge$
   $\neg l \wedge (i \in [u..v]))$

   Ekkor a szekvencia első fele lehetne az $i :\in [u..v]$ értékkiválasztás. Hatékonysági szempotokat is figyelembe véve azonban válasszuk az intervallum középső elemét: $i := \lceil (u+v)/2 \rceil$. A ciklusmag második felében három eset lehetséges:

   – $f(i) < h$: ekkor az $u := i + 1$ értékadás az invariánst megtartja,
   – $f(i) = h$: ekkor megtaláltuk a keresett elemet, tehát $l := igaz$,
   – $f(i) > h$: ekkor az $v := i - 1$ értékadás az invariánst megtartja.

5) Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a fenti elágazás mindhárom ága csökkenti a termináló függvényt.

Tétel: Az alábbi struktogram formában megadott program megoldása a fent specifikált feladatnak:



Bizonyítás: A tétel a fenti levezetés következménye.